无源汇有上下界网络的可行流

Felicia

April 1, 2008

1 问题

在一个无源汇的流网络G中，流f满足

$$\forall (i,j) \in E, B(i,j) \leq f(i,j) \leq C(i,j)$$

$B(i,j)$为容量下界，$C(i,j)$为容量上界。同时任意一点u满足流量平衡条件

$$\sum_{(i,u)\in E} f(i,u) = \sum_{(u,j)\in E} f(u,j)$$

求一个可行流或者指出可行流不存在。此问题称为**无源汇有上下界网络的可行流**问题。

2 解决思路

因为可行流f的每条边$f(i,j)$上至少要有$B(i,j)$的流量，我们不妨设

$$f(i,j) = B(i,j) + g(i,j)$$

对于任意一点u，代入流量平衡条件得到

$$\sum_{(i,u)\in E} B(i,u) + g(i,u) = \sum_{(u,j)\in E} B(u,j) + g(u,j)$$

移项得

$$\sum_{(i,u)\in E} B(i,u) - \sum_{(u,j)\in E} B(u,j) = \sum_{(u,j)\in E} g(u,j) - \sum_{(i,u)\in E} g(i,u)$$

注意等式左边是只和下界B有关的常量，可以看做是点u的属性，因此我们定义

$$D(u) = \sum_{(i,u)\in E} B(i,u) - \sum_{(u,j)\in E} B(u,j)$$

因为G上的可行流必须满足每条边的流量至少达到下界，所以我们考虑这样一个伪流f_0（不满足流量平衡条件）

$$\forall (i,j) \in E, f_0(i,j) = B(i,j)$$

$D(u)$的意义非常明显：$D(u) > 0$表示在f_0中点u流量过剩，$D(u) < 0$表示在f_0中点u流量不足。虽然f_0不满足流量平衡条件， 但是我们可以构造另一个伪流f_1与f_0叠加

$$f(i,j) = f_0(i,j) + f_1(i,j)$$

叠加后的结果f满足流量平衡条件

$$D(u) + \sum_{(i,u)\in E} f_1(i,u) = \sum_{(u,j)\in E} f_1(u,j)$$

由流量限制条件

$$f_0(i,j) + f_1(i,j) \le C(i,j)$$

两边减去$B(i,j)$得

$$f_1(i,j) \le C(i,j) - B(i,j)$$

至此我们得到了$f_1(i,j)$的上界，接下来易通过构造下界为0的网络G_1求解f_1：

1. 构造与G拓扑同构的网络G_1，并增设源s'和t'
2. 对$\forall D(u) > 0$增加边(s',u)，$C(s',u) = D(u)$
3. 对$\forall D(v) < 0$增加边(v,t')，$C(v,t') = -D(v)$

在G_1中求最大流得f_1，若f_1满足s'的出边全部满流，那么$f_0 + f_1 = f$一定是原网络中的一个可行流，否则无解。

3 习题

ZJU2314 Reactor Cooling

References

[1] 周源：《一种简易的方法求解流量有上下界的网络中网络流问题》(2004)